Решение варианта № 1

Задача 1

Найти наибольшее значение выражения

$$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 4\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17\pi}{8} - 4\alpha\right)$$

при $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{8}$.

Решение

$$A = \frac{1 - \cos\left(\frac{15\pi}{4} - 8\alpha\right)}{2} - \frac{1 - \cos\left(\frac{17\pi}{4} - 8\alpha\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - 8\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 8\alpha\right)\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin 8\alpha = \frac{\sin 8\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Так как $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{8}$, то наибольшее значение A принимает, когда $\sin 8\alpha = 1$, т.е. при $\alpha = \frac{\pi}{16}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ при $\alpha = \frac{\pi}{16}$.

Задача 2

Решить уравнение:

$$x^2 + \frac{81x^2}{(9 + x)^2} = 40.$$

Решение

$x^2(9+x)^2+81x^2=40(9+x)^2$; $x^2((9+x)^2+81x)=40(9+x)^2$;
$x^2(x^2+18x+162)=40(9+x)^2$; $x^2(x^2+18(x+9)=40(9+x)^2$.
Положим $u=x^2$, $v=x+9$, тогда $u(u+18v)=40v^2$; $u^2+18uv-40v^2=0$;

$u = -9v \pm \sqrt{81v^2 + 40v^2}$;

$\left[\begin{array}{l} u = -20v \\ u = 2v \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2 + 20x + 180 = 0 \\ x^2 - 2x - 18 = 0 \end{array}\right.$; $x = 1 \pm \sqrt{19}$.

Ответ: $x_1 = 1 + \sqrt{19}$, $x_2 = 1 - \sqrt{19}$.

Задача 3

Найти целые значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{0,3}\left(\sqrt{x+5}-x+1\right)>0.$$

Решение

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}\sqrt{x+5}-x+1<1,\\ \sqrt{x+5}-x+1>0,\\ x\in Z\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\sqrt{x+5}<x,\\ \sqrt{x+5}>x-1,\\ x\in Z\end{cases}$$

Отсюда x > 0 и, следовательно, x ≥1 (x ∈ Z). Поэтому

$$\begin{cases}(x+5)<x^2,\\ x+5>(x-1)^2,\\ x\in Z\\ x\geq 1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}<x<4,\\ x\in Z\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x=3.$$

Ответ: x = 3.

Задача 4

В окружность радиуса R вписаны четыре равные окружности, каждая из которых касается данной и двух соседних. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими четырьмя окружностями.

Решение

Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры четырех данных окружностей радиуса r, каждая из которых касается двух соседних, и вписанных в окружность радиуса R с центром P. Очевидно, P совпадает с центром квадрата $O_1O_2O_3O_4$ со стороной 2r, причем PO_1 = R — r (прямая PO_1 проходит через точку касания окружностей P и O_1). Отсюда $2r = O_1O_2 = PO_1\cdot\sqrt{2} = (R-r)\cdot\sqrt{2}$. => $r = R(\sqrt{2}-1)$.

Площадь фигуры Ф, ограниченной окружностями O_i, i = 1,2,3,4, равна площади квадрата $O_1O_2O_3O_4$ за вычетом площадей четырех секторов в 90° и радиуса r, т. е.

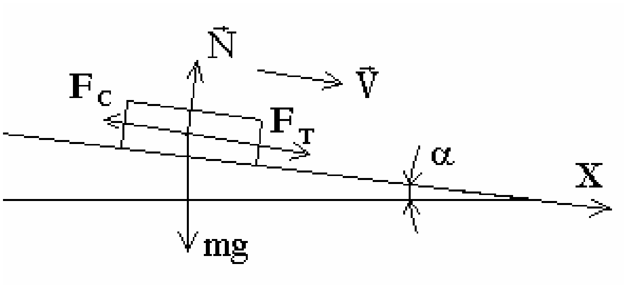
$$S_\Phi=4r^2-4\frac{\pi r^2}{4}=R^2(4-\pi)(3-2\sqrt{2}).$$

Ответ: $R^2(4-\pi)(3-2\sqrt{2})$.

Задача 5

Электровоз массой 300 т при движении со скоростью 36 км/ч испытывает силу сопротивления движению 3% от его веса. Какой величины ток будет протекать через мотор электровоза, если напряжение в сети 3000 В, к.п.д. электровоза 80%, а движется он вниз по горе, образующей угол α с горизонтом ($\sin\alpha = 0{,}01$)? Принять ускорение свободного падения равным 10 м/с^2.

<u>Решение</u>



Согласно 1-му закону Ньютона

$$\vec{F_C} + \vec{N} + \vec{F_T} + m\vec{g} = 0.$$

Сумма проекций на ось X дает выражение

$$F_T = F_C - mg\sin\alpha.$$

Согласно условию F_C = 0,03 mg.

Мощность, развиваемая мотором электровоза, равна

$$F_T \cdot V = U \cdot I \cdot \eta.$$

Тогда

$$I = \frac{F_T \cdot V}{U \cdot \eta} = \frac{mg(0{,}03 - \sin\alpha)V}{U \cdot \eta} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot (0{,}03 - 0{,}01) \cdot 10}{3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}8} = 250(A)$$

<u>Ответ</u>: 250 А.

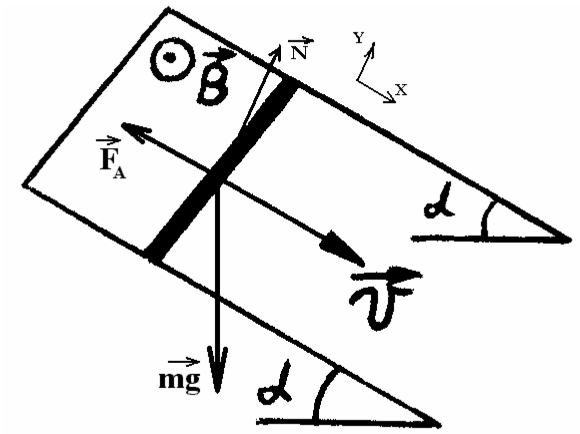
Задача 6

По двум гладким, замкнутым между собой металлическим шинам, установленным под углом $\alpha = 30^o$ к горизонту, скользит проводник массой m = 6 г и длиной L = 0,25 м. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,4 Тл, перпендикулярном плоскости, в которой перемещается проводник. Какой максимальной скорости достигнет проводник, если его сопротивление равно R = 0,1 Ом? Сопротивлением конструкции по сравнению с сопротивлением проводника пренебречь. Принять g = 10 м/с^2, $\sin 30^0 = 0{,}5$; $\cos 30^0 = 0{,}85$.

Решение

Согласно 1-му закону Ньютона (т.к. при V_{max}=const ускорение равно 0)

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{N} = 0.$$



Сила трения равна 0 , т.к. шины гладкие.

Сумма проекций на ось X дает

$$mg\sin\alpha - F_A = 0.$$

Сумма проекций на ось Y дает

$$N = mg\cos\alpha.$$

Сила Ампера, действующая на проводник

$$F_A = I \cdot B \cdot L \cdot \sin\beta, (\sin\beta = 1).$$

ЭДС самоиндукции, возникающая при движении проводника в магнитном поле по модулю равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B \cdot \Delta S}{\Delta t} = B \cdot L \cdot V$$

В соответствии с законом Ома имеем

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B \cdot L \cdot V}{R}.$$

Тогда

$$F_A = \frac{B^2 \cdot L^2 \cdot V}{R}.$$

Из уравнения проекций на ось X имеем

$$mg\sin\alpha = \frac{B^2 \cdot L^2 \cdot V}{R}.$$

Окончательно получим

$$V = \frac{R \cdot mg\sin\alpha}{B^2 \cdot L^2} =$$

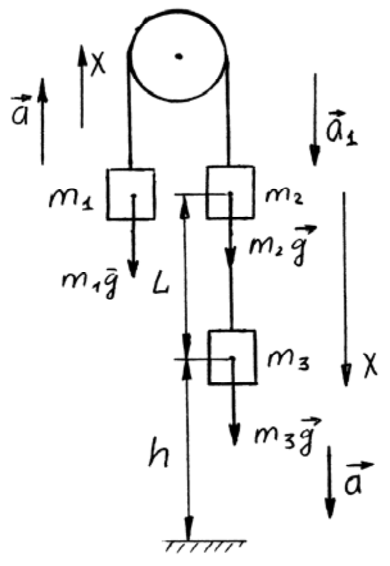
$$= \frac{0,1 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 0,5}{0,4^2 \cdot 0,25^2} = 0,3(m/s)$$

Ответ: 0,3 м/с.

Задача 7

Два груза массами m_1=3 кг, m_2=5 кг соединены невесомой, нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок. К грузу m_2 с помощью такой же нити длиной L = 0,25 м прикреплен груз массой m_3=2кг, находящийся первоначально на расстоянии h=3,5 м от поверхности земли (см. рис.). Через время t = 0,5 с после начала движения нить, соединяющую грузы m_2 и m_3 пережигают. С каким интервалом времени Δt грузы m_2, m_3 достигнут поверхности земли? Размерами грузов, трением в блоке и сопротивлением воздуха пренебречь. Принять g = 10 м/с^2.

Решение



В соответствии со 2-м законом Ньютона имеем

$$m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + m_3\vec{g} = (m_1 + m_2 + m_3)\vec{a}$$

Тогда из суммы проекций на ось X получим ускорение a

$$a = \frac{m_2 g + m_3 g - m_1 g}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{10(5+2-3)}{3+5+2} = 4(m/s^2)$$

Определим , на какой высоте будет находиться третий груз в момент пережигания нити

$$h_1 = h - \frac{a \cdot t^2}{2} = 3,5 - \frac{4 \cdot 0,5^2}{2} = 3(m)$$

В этот момент все грузы будут иметь скорость

$$V_1 = a \cdot t = 4 \cdot 0,5 = 2(m/s)$$

Определим, спустя какое время третий груз достигнет земли после пережигания нити находясь в свободном падении с начальной скоростью

$$h_0 = h_1 - V_1 \cdot t_1 - \frac{g \cdot t_1^2}{2}$$

$$0 = 3 - 2t_1 - \frac{10t_1^2}{2}$$

Решая квадратное уравнение и полагая время положительным, имеем

$$t_1 = 0,6(s).$$

Т.е. третий груз достигнет земли спустя 0,6 с после пережигания нити.

Рассмотрим движение оставшихся 2 грузов. Согласно 2-му закону Ньютона получим

$$m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = (m_1 + m_2)\vec{a_1}$$

Из суммы проекций на ось X получим

$$a_1 = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2} = \frac{(5-3)10}{3+5} = 2,5(m/s^2)$$

Т.к. второй груз в момент пережигания нити находился над поверхностью земли на высоте $h_2 = 3,25$ м, то будем иметь

$$h_0 = h_2 - V_1 \cdot t_2 - \frac{a_1 t_2^2}{2}$$

$$0 = 3,25 - 2t_2 - \frac{2,5t_2^2}{2}$$

Решая квадратное уравнение, получим что $t_2 = 1$(с).

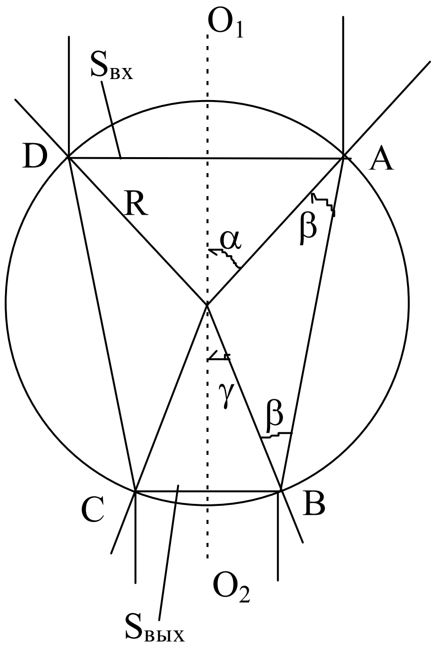
Значит тела упадут на землю с интервалом времени

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 1 - 0,6 = 0,4(s).$$

Ответ: 0,4 секунды.

Задача 8

Очень узкий цилиндрический пучок света падает на стеклянный шар, расположенный в вакууме так, что ось пучка проходит через центр шара. Определить коэффициент преломления стекла, если известно, что площадь сечения пучка на входе в шар в 16 раз больше, чем его площадь на выходе из шара.



Решение

Т.к. $S_{вх}/S_{вых} = \pi R_1^2 / \pi r^2 = 16$,
то $R_1/r = 4$ и $AO_1/BO_2 = 4$.

Примем $AO_1 = 4$ и $BO_2 = 1$.
В треугольнике AOO_1 $\sin\alpha = 4/R$, а в треугольнике BOO_2 $\sin\gamma = 1/R$.

Из треугольника АОВ получим , что $\angle AOB = 180 - 2\beta$.
С другой стороны легко получить , что $\alpha + \gamma + (180 - 2\beta) = 180$.
Следовательно $\alpha + \gamma - 2\beta = 0$ или $\gamma = 2\beta - \alpha$.
Ввиду узости светового луча можно принять, что $\sin\alpha \approx \alpha, \sin\gamma \approx \gamma$.
Тогда $\alpha = 4/R, \gamma = 1/R$.
Значит $2\beta = \alpha + \gamma = 5/R; \beta = 2{,}5/R$.
Окончательно получим, что

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{4}{R}}{\frac{2{,}5}{R}} = 1{,}6.$$

Ответ: 1,6.

Задача 9

Сушильная камера имеет размеры: 4 м х 2 м х 2м. Каждые четверть часа воздух камеры заменяют холодным (+10° С). Сколько требуется уплатить за электроэнергию, затраченную на нагрев воздуха в камере электропечи за 7 часовой рабочий день, если воздух в ней нагревается до 60° С, тариф 20 коп./кВт.час, теплоемкость воздуха С=240 кал/кг.град., плотность воздуха ρ=1,29 кг./м^3; 1 кал.=4,19 Дж. и 1кВт.час.=3,6$*10^6$ Дж.?

Решение

Объем камеры: V_k= 4*2*2= 16 (куб.м)

За смену воздух в этом объеме сменяется h= 7/0,25 = 28 (раз).

Объем нагреваемого воздуха за смену $V = V_k h = 16*28 = 448$ (куб.м).

Теплоемкость воздуха применительно к объему

$C_v = C^* \varpi = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 = 314 c^{-1} = 240*1{,}29 = 310$(кал/куб.м*град)

Требуемое количество тепла

$Q = C_v * V (T_k - T_н) = 310 * 448 (60 - 10) = 6900000$ (кал)

Затрачиваемая электрическая энергия

$W = Q*k = 6900000 * 4{,}19 / 3600 = 8$ (кВт / час)

Необходимо за день работы уплатить $S = 8 * 20 = 160$ (коп).

Ответ: 1 рубль 60 копеек.

Задача 10

В катушке, включенной на переменное напряжение U=12 В с частотой f=50 Гц, установился ток I=1,2 А. Активное сопротивление катушки r=2,8 Ом. Определить индуктивность катушки.

Решение

Полное сопротивление катушки $Z = U / I = 12 / 1{,}2 = 10$ (Ом)

Учитывая , что $Z = \sqrt{r^2 + X_L^2}$, найдем $X_L = \varpi = 9{,}6$ (Ом).

Так как $\varpi = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 = 314 c^{-1}$, то индуктивность катушки L определим как $L = X_L / \varpi = 9{,}6 / 314 = 0{,}03$ (Гн).

Ответ: 0,03 Гн.